MATHEMATIQUES I
OPTION SCIENTIFIQUE

VENDREDI 9 MAI 1997, de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Seules sont autorisées: *Une règle graduée.*
Une calculatrice de poche pouvant être programmable et /ou alphanumérique, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de surface de base maximum de 21 cm de long sur 15 cm de large.

L'épreuve est composée de deux problèmes indépendants, dont les différentes parties sont elles-mêmes largement indépendantes.

Problème I

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$.

Partie 1

1. Etudier les variations de f_n.
2. Construire les courbes représentatives de f_1 et de f_2 dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités : $5\,cm$ sur l'axe des abscisses, $10\,cm$ sur l'axe des ordonnées).
3. On suppose dans cette question $n \geq 2$.
   a) Montrer que f_n'' s'annule en changeant de signe pour 2 racines u_n et v_n, telles que $0 < u_n < v_n$. Que peut-on en conclure pour la courbe représentative de f_n ?
   b) On pose : $a_n = f_n(u_n)$ et $b_n = f_n(v_n)$. Expliciter $\ln\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$.
   c) Donner le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $u \mapsto \ln\left(\dfrac{1-u}{1+u}\right)$.
   d) Déduire de ce qui précède la limite de la suite $\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 2}$.
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n^{(n)}(x) = P_n(x) \cdot e^{-x}$,
   où P_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $\dfrac{(-1)^n}{n!}$.

Partie 2

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{n!} e^{-x}\, dx$ converge.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{n!} e^{-x}\, dx$.

   a) Calculer I_0.

   b) Etablir que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = I_{n+1}$.

   c) En déduire la valeur de I_n.

Partie 3

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction d_n par :

$$\begin{cases} d_n(x) = \frac{1}{2} f_n(x) & \text{si } x \geq 0 \\ d_n(x) = \frac{1}{2} f_n(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement d_1 et d_2 (unités : $5\,cm$ sur l'axe des abscisses, $20\,cm$ sur l'axe des ordonnées)

2. Montrer que d_n est une densité de probabilité d'une variable aléatoire absolument continue X_n.

3. Soit D_n la fonction de répartition de X_n. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ D_n(x) + D_n(-x) = 1$.

4. Pour $r \in \mathbb{N}$, calculer $E(X_n^r)$.

5. a) Etablir, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, que :

$$\int_0^x f_n(t)\, dt = 1 - e^{-x} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right)$$

   b) En déduire, pour $x \in \mathbb{R}^+$ puis pour tout $x \in \mathbb{R}$, une expression de $D_n(x)$ sans signe intégrale.

Problème II

Partie 1

On considère l'ensemble $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} 4a-2b & a-2b & a+b \\ a-2b & 4a+b & a-2b \\ a+b & a-2b & 4a-2b \end{pmatrix} \Big/ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel réel ; en donner une base et la dimension.

2. Expliquer pourquoi tout élément de E est diagonalisable.

3. L'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

On note u et v les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont respectivement :

$$U = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que : $V \in E$. Calculer V^2 et en déduire les valeurs propres de v.

b) Montrer que les vecteurs $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (-1,0,1)$ et $e_3 = (1,-2,1)$ sont vecteurs propres de u et v.

c) En déduire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle les matrices de u et v sont toutes les deux diagonales.

d) Donner les valeurs propres d'un élément $M(a,b)$ de E.
Expliciter une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que :
${}^tP\,M(a,b)P = D$.

Partie 2

On considère une suite d'expériences aléatoires.
Chaque expérience n'admet que 3 résultats possibles : E_1, E_2, E_3.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A la $n^{ième}$ expérience, on associe la matrice–colonne :

$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, où a_n (respectivement b_n, c_n) est la probabilité d'obtenir le résultat E_1 (respectivement E_2, E_3).

En outre, on se donne $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$, où a_0, b_0 et c_0 sont 3 réels tels que : $a_0 + b_0 + c_0 = 1$.

Pour i et j éléments de $\{1,2,3\}$, on note p_{ij} la probabilité pour que E_j se réalise à une expérience, sachant que E_i s'est réalisé à l'expérience précédente.

La dépendance entre les réalisations successives est décrite par : $p_{ij} = \frac{2}{3}$ si $i = j$
$p_{ij} = \alpha$ sinon.

1. Calculer $(p_{11} + p_{12} + p_{13})$ de 2 façons. En déduire la valeur de α.

2. Déterminer la matrice L telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = LX_n$.

3. Vérifier que $L \in E$.

4. Calculer L^n, pour $n \in \mathbb{N}$.

5. En déduire les expressions de a_n, b_n et c_n en fonction de a_0, b_0 et c_0.
Etudier le comportement de a_n, b_n et c_n quand n tend vers $+\infty$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail